11. évfolyam gimnázium, I. forduló

pontozási útmutató

1. Egy szabályos dobókockával 4-szer dobunk egymás után.
   a) Hányféle dobássorozat jöhet létre?
   b) Hányféle dobássorozat van, melyben a második dobásra, és csak arra dobunk, 3-ast?
   c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első dobás eredménye különbözik a többi dobás eredményétől?

Megoldás:

a) Mindegyik dobás hatféle lehet, így összesen $6^4 = 1296$ számsorozatot kaphatunk. (2 pont)

b) Az egy hármas helyére egy hely van, a többi helyre öt számjegy kerülhet, így a feltételnek megfelelő számsorozatok száma: $5^3 = 125$. (2 pont)

c) Az első helyen hatféle szám állhat, míg a többi helyen ötféle szám. (2 pont)
Ezért a kedvező esetek száma $6 \cdot 5^3 = 750$. (2 pont)
A kérdéses valószínűség: $P = \frac{6 \cdot 5^3}{6^4} \approx 0{,}579$ (2 pont)

Összesen: 10 pont

2. Tekintsük az $(p+10)x^2 + (2p-4)x + 6 = 0$ másodfokú egyenletet, ahol p valós paraméter; $x_1,\ x_2$ az egyenlet valós gyökeit jelölik.
   a) A p paraméter mely értékére lesz $x_1 + x_2 = 0$?
   b) A p paraméter mely értékére lesz $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 2$?

Megoldás:

A feladat kérdéseiből adódik, hogy az egyenlet másodfokú, $p \neq -10$ és akkor van valós gyök, ha a diszkrimináns

$$(2p-4)^2 - 24(p+10) \geq 0, \qquad \text{(1 pont)}$$

ahonnan

$$p^2 - 10p - 56 \geq 0. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ez akkor teljesül, ha $p \leq -4$ vagy $p \geq 14$. (1 pont)

a) A gyökök és együtthatók összefüggéséből

$$x_1 + x_2 = -\frac{2p-4}{p+10} = 0. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ez $p = 2$ esetén teljesül, amire nincs valós gyök, így a gyökök összege sohasem lesz 0. (1 pont)

b) A gyökök szorzata $\frac{6}{p+10}$, ezért, ha vannak valós gyökök, akkor azok egyike sem 0.
Az összefüggést átalakítva:

$$x_1^2 + x_2^2 = 2(x_1 x_2)^2, \qquad \text{(1 pont)}$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 2(x_1 x_2)^2 .$$

(1 pont)

Másképpen: $\left(\frac{4-2p}{p+10}\right)^2 - \frac{12}{p+10} = 2\left(\frac{6}{p+10}\right)^2$, ahonnan (1 pont)

$p^2 - 7p - 44 = 0$, ami $p = -4$ és $p = 11$ esetén teljesül. (1 pont)

Az eredeti egyenletnek $p = 11$ esetén nincs valós gyöke,
$p = -4$ esetén teljesül a valós gyökök közötti összefüggés. (1 pont)

Összesen: **10 pont**

3. Egy dobozban összesen 79 darab fehér és piros golyó van, melyek között vannak nagyok és kicsik is. A következőket tudjuk:
   - A piros golyók száma osztható 11-gyel.
   - Legkevesebb a kis fehér golyóból van.
   - A nagy piros golyók száma egyenlő a fehér golyók számával.
   - Mindegyik fajta golyó száma prímszám.

   Melyik fajta golyóból hány darab van?

Megoldás:

A negyedik feltétel alapján a négy prímszám összege csak úgy lehet 79, ha valamelyik golyóból 2 db van, ami csak a kis fehér golyók száma lehet. (2 pont)

A nagy piros golyók számát jelölje P, a kis piros golyók számát p, a nagy fehér golyók számát F. Az előzőek alapján $P + p + F = 77$. (2 pont)

Mivel $P + p$ osztható 11-gyel, ezért a fenti egyenletből adódik, hogy F is osztható 11-gyel, de mivel prím is, ezért $F = 11$. (3 pont)

Innen $P + p = 66$ és $P = F + 2 = 13$. (1 pont)

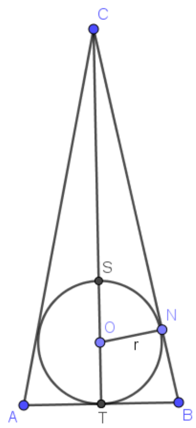
A fentiek alapján a kis piros golyók száma 53, ami prímszám. (2 pont)

Összesen: **10 pont**

4. Az egyenlő szárú *ABC* háromszögben *AB* = *AC*. Az alap és a szár hosszának az aránya 2:5.
   a) Igazoljuk, hogy a háromszög súlypontja illeszkedik a háromszög beírt körére.
   b) Hányszorosa a háromszög köré írt kör sugara a beírt kör sugarának?

Megoldás:

Készítsünk ábrát!



a) A feltételek alapján, ha *AB*= 2*x*, akkor *BC* = 5*x*. A háromszög félkerülete 6*x*. (1 pont)

A háromszög *CT* magassága a *CTB* derékszögű háromszögből: *CT* = $\sqrt{24}x$. (1 pont)

A háromszög területét kétféleképpen felírva $r \cdot 6x = x \cdot \sqrt{24}x$. Innen $r = \frac{\sqrt{6}}{3}x$. (2 pont)

Jelölje *S* a beírt kör és a *CT* magasság (súlyvonal) metszéspontját.

Így $\frac{TS}{TC} = \frac{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}x\right)}{(2\sqrt{6}x)} = \frac{1}{3}$, ami azt jelenti, hogy az *S* pont a *CT*-n a súlypont. (2 pont)

b) A köré írt kör sugara: $R = \frac{2x \cdot 5x \cdot 5x}{4T}$, a beírt kör sugara: $r = \frac{T}{6x}$. (2 pont)

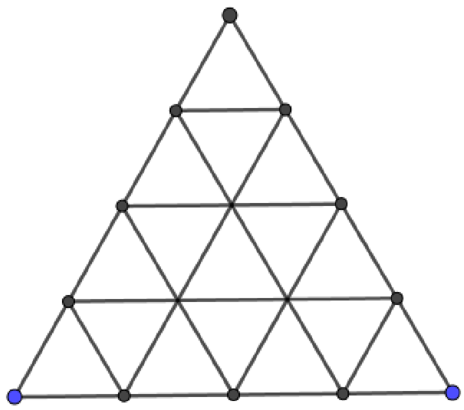
Behelyettesítve a $T = 2\sqrt{6}x^2$-t, $\frac{R}{r} = \frac{25}{2}$ adódik. (2 pont)

Összesen: 10 pont

5. Egységnyi oldalú szabályos háromszög belsejében van 33 különböző pont. Bizonyítsuk be, hogy van köztük 3 olyan, amelyek által meghatározott háromszög területe nem nagyobb, mint $\frac{\sqrt{3}}{64}$.

Megoldás:

Osszuk fel a szabályos háromszög oldalait 4 egyenlő részre, és az osztópontokat kössük össze az oldalakkal párhuzamos szakaszokkal, lásd ábra!



Így a háromszöget 16 egybevágó kis szabályos háromszögre bontottuk. (4 pont)
Ebben az ábrában akárhogy is helyezünk el 33 pontot, lesz három olyan pont, melyek egy kis háromszögben, vagy annak határán vannak. (3 pont)
Ilyen három pont által meghatározott háromszög területe legfeljebb 16-od része az eredeti háromszög területének, ami $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{16} = \frac{\sqrt{3}}{64}$.
(3 pont)

Összesen: 10 pont

6. Az $N = 9 + 99 + 999 + \ldots + 99\ldots9$ szám tízes számrendszerbeli alakjában hányszor fordul elő az 1-es számjegy, ahol az N utolsó tagja 2023 darab 9-es számjegyet tartalmaz?

Megoldás:

Az összegben szereplő n-edik tagot írjuk át a következő alakba: $99\ldots9 = 10^n-1$(4 pont)
Ha mindegyik tagra elvégezzük a fenti átírást, akkor,
$N = 10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^{2023} - 2023 = 111\ldots10 - 2023$ (2 pont)
A kivonás elvégzése után:
$N = 111\ldots109087$, ami 2019 darab 1-es számjegyet tartalmaz. (4 pont)

Összesen: 10 pont